Chapitre I

Premiers exemples de problèmes d'optimisation et vocabulaire.

I.1 Motivations.

Les problèmes d'optimisation apparaîssent dans de nombreux domaines. Un ingénieur qui doit construire un bâtiment se doit de choisir les meilleurs matériaux au meilleur rapport qualité-prix afin d'avoir une structure aussi sûre que possible le moins cher possible. Un courtier doit choisir les bons investissements qui génèreront les meilleurs rentes tout en gardant le risque de perte sous contrôle (à son minimum). Un système physique va avoir tendance à se mettre dans un état d'énergie minimale tout en respectant les contraintes physiques qui peuvent lui être données. On pourrait même imaginer un étudiant qui cherche à minimiser le nombre d'heures à passer sur son cours pour avoir une bonne note [1].

Pour toutes ces situations, on peut trouver des points communs :

— Il y a un but ou un **objectif** à atteindre pour l'activité concernée (rendre meilleur), via un **coût** à minimiser.

— On cherche à atteindre cet objectif au regard potentiellement de toutes une série de **contraintes** ou d'attendus qu'il faut atteindre et/ou satisfaire.

— Implicitement, on suppose qu'il y a un ou des choix possibles de paramètres pour satisfaire aux deux items précédents. Ces paramètres seront appelés **variables d'optimisation ou de design**. On devra sélectionner les variables importantes d'un problème d'optimisation à considérer. Ainsi, alors que le temps qu'il fait peut influer sur la construction d'un bâtiment (ou les révisions d'un cours...), ce n'est pas forcément le cas pour le banquier. La variable "temps qu'il fait" peut donc ou non influencer l'objectif.

En résumé : **la formulation d'un problème d'optimisation** implique de définir et **comprendre** correctement le problème posé et de savoir le **formaliser** en une série de problèmes mathématiques pour espérer le **résoudre**. Plus précisément, la formalisation d'un problème d'optimisation va mettre en jeu :

— Le choix d'une ou plusieurs *variables d'optimisation* vivant dans un espace général à déterminer,

— Définir une *fonction objectif* (ou *fonction coût*),

1. même si la solution miracle n'existe pas, il faut travailler son cours et ses TDs/TPs !

— Le cas échéant, identifier l'ensemble des *contraintes*.

Dans la suite, donnons quelques exemples de tels problèmes.

I.2 Premiers exemples simples

I.2.1 Révision des examens

Un étudiant doit réviser pour ses examens et il cherche à optimiser le nombre d'heures passées à réviser pour obtenir la meilleure note possible. Il a 4 UE à passer et a une semaine pour réviser, ce qui lui donne 42 heures de travail (6 jours et 7h de travail par jour). Les variables d'optimisation sont le nombre d'heures de travail par matières (il y en a donc 4) : pour $i \in \{1, .., 4\}$, on note x_i, le nombre d'heures de révisions pour la matière numéro i. L'étudiant fait face à des contraintes : la somme des heures travaillées doit être au plus égale à 42 et il doit passer un nombre d'heures positive sur chaque UE.

L'ensemble des contraintes peut ainsi se formaliser à l'aide d'un ensemble K :

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \text{ tel que } \forall i \in \{1, .., 4\}, x_i \geq 0, \text{ et } \sum_{i=1}^{4} x_i \leq 42 \right\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^4$, on note $M(x)$ la moyenne des notes (sur 20) obtenues par l'étudiant après avoir révisé x_i heures sur la matière i. L'objectif est de maximiser M ou encore de minimiser $20 - M$.

Le problème d'optimisation peut donc s'écrire :

$$\text{Trouver } x^* \in K \text{ tel que } 20 - M(x^*) = \inf_{x \in K}(20 - M(x)).$$

I.2.2 Consommation des ménages.

On considère un ménage qui peut consommer n types de marchandises (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dont les prix forment un vecteur $p \in \mathbb{R}^n_+$. Son revenu à dépenser est un réel $b > 0$. Ce ménage cherche à optimiser la quantité de chaque marchandise achetée pour en tirer le maximum de contentement sans dépasser son budget. Ses choix de consommation sont supposés être modélisés par une fonction d'utilité u de $\mathbb{R}^n_+$ dans $\mathbb{R}$ (croissante et concave), qui mesure le bénéfice que le ménage tire de la consommation de la quantité $x = (x_1, ..., x_n)$ des n marchandises. La consommation du ménage sera le vecteur x^* qui réalisera le maximum de

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+, \langle x, p \rangle \leq b} u(x),$$

où $\langle x, p \rangle = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ (ici $\langle ., . \rangle$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Autrement dit c'est le vecteur qui maximise l'utilité sous une contrainte de budget maximal.

I.2.3 Problème du toboggan

On se donne deux points A et B (avec le point A plus haut que le point B qui est au sol), et on se demande quelle serait la forme d'un toboggan qui permettrait d'atteindre le point B en partant du

point A, le plus rapidement possible. Mathématiquement, on cherche donc à déterminer une courbe du plan reliant A et B, telle qu'un point matériel de poids donné (donc sous l'action de la gravité) glissant le long de cette courbe partant de A arrive en B en un temps minimal. Le tobbogan est donc représenté par le graphe d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $f(0) = h > 0$ (hauteur du toboggan donnée) et $f(1) = 0$. On prend donc $A = (0,h)$ et $B = (1,0)$.

En écrivant la conservation de l'énergie, on trouve que, pour une fonction f donnée, le temps de descente $T(f)$ du toboggan est donné par la formule

$$T(f) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{2g(h-f(x))}dx,$$

avec g la constante de gravitation.

Le problème revient donc à minimiser T avec f dans un certain espace de fonctions $\mathcal{F}$: $\min_{f\in\mathcal{F}} T(f)$.

I.2.4 Identification de paramètres

On se donne un signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont on sait qu'il dépend de 3 paramètres $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et qui a la forme :

$$f(t) = a\cos(bt+c). \tag{I.1}$$

Pour identifier ces paramètres, on ne dispose que d'un nombre fini $m \in \mathbb{N}^*$ de mesures $(t_i, y_i)_{i\in\{1,..,m\}}$. On choisit alors de minimiser une fonctionnelle $\mathcal{J}$ représentant une certaine distance aux mesures :

$$\mathcal{J}(a,b,c) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - f(t_i))^2.$$

C'est ce qui s'appelle calibrer les paramètres.

I.3 Mise en forme mathématique générale et éléments de vocabulaire

I.3.1 Forme générale d'un problème d'optimisation

Tous les exemples ci-dessus rentrent dans un cadre assez général sous lequel on peut écrire un problème d'optimisation. On notera :

- V l'espace dans lequel le problème est posé et où vont vivre les variables d'optimisation (i.e. où seront à chercher les variables d'optimisation). On cherchera V comme un espace vectoriel normé muni d'une norme que l'on notera $\|\cdot\|$.
- On se donne aussi K qui définira l'ensemble des contraintes qui s'appliqueront sur le système.
- Enfin, on se donne $\mathcal{J}$ le critère à minimiser que l'on appellera fonction objectif ou fonction coût ou fonctionnelle, avec $\mathcal{J} : K \subset V \to \mathbb{R}$.

Ce sont des ***données du problème***.

Remarque importante : *Ensuite, on peut toujours se ramener à un problème de minimisation. En effet, si le problème consiste à maximiser une certaine fonction coût $\mathcal{J}$, alors étudier le problème de maximisation de $\mathcal{J}$ revient à étudier le problème de minimisation de $-\mathcal{J}$).*

Ainsi, dans la suite, on ne considèrera que des problèmes de minimisation pour développer les stratégies de résolution numérique.

Un problème d'optimisation *Opt* peut alors se mettre sous la forme générale très simple suivante : on cherche à savoir s'il existe un u^* dans K qui réalise le minimum de $\mathcal{J}$ sur K, $\min_{u\in K} \mathcal{J}(u)$.

Cela peut encore s'écrire : *Trouver $u^* \in K$ tel que*

$$\mathcal{J}(u^*) = \inf_{u\in K} \mathcal{J}(u).$$

L'inconnue du problème est donc u à chercher dans l'ensemble K.

Le point $u^* \in K$, s'il existe, est alors appelé *point de minimum* de $\mathcal{J}$ sur K. On note encore :

$$\mathcal{J}(u^*) = \min_{u\in K} \mathcal{J}(u).$$

Il se pose alors plusieurs questions mathématiques qui se traduisent sur le problème concret de départ.

(A) Parle-t-on de min ou d'inf ? Y a-t-il existence d'au moins une solution u^* à ce problème ?
(B) Si une solution existe est-elle unique ?
(C) A-t-on une caractérisation du ou des minima, s'ils existent,
(D) Peut-on trouver cette (ces) solution(s) minimale(s) quand elle(s) existe(nt) ? Est-on capable de donner l'expression de cette solution ?

Suivant les cas, la réponse est plus ou moins simple, positive ou négative, voire même parfois inconnue !

Pour les exemples précédents, on peut identifier les données V, K, $\mathcal{J}$.

I.3.2 Définitions et éléments de vocabulaire.

Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et K un sous-ensemble de V ($V \subset K$). On considère $\mathcal{J} : K \subset V \to \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de minimisation associé à $\mathcal{J}$.

On distingue les minima locaux des minima globaux.

Definition I.3.1 *On dit que u est un point de minimum local de $\mathcal{J}$ sur K si*

$$u \in K \text{ et } \exists \delta > 0,\ \forall v \in K,\ \|v - u\| < \delta \Rightarrow \mathcal{J}(v) \geq \mathcal{J}(u).$$

On dit alors que la valeur $\mathcal{J}(u)$ est un minimum local de $\mathcal{J}$ sur K.

Definition I.3.2 *On dit que u est un point de minimum global de $\mathcal{J}$ sur K si*

$$u \in K \text{ et } \forall v \in K, \mathcal{J}(v) \geq \mathcal{J}(u).$$

On dit alors que la valeur $\mathcal{J}(u)$ est un minimum global de $\mathcal{J}$ sur K.

Definition I.3.3 *On appelle infimum de $\mathcal{J}$ sur K et on note $\inf_{u\in K}(\mathcal{J}(u))$:*
— *la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\{\mathcal{J}(u),\ u \in K\}$, si K est non vide et $\mathcal{J}$ est minorée.*
— *Si $\mathcal{J}$ n'est pas minorée sur K et K est non vide, alors l'infimum est $-\infty$.*
Si K est vide, par convention, l'infimum est $+\infty$.

Definition I.3.4 *Supposons que K est non vide. Une suite minimisante de $\mathcal{J}$ dans K est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in K \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathcal{J}(u_n) = \inf_{v\in K} \mathcal{J}(v).$$

Par définition même de l'infimum, **une suite minimisante existe toujours**.

En effet, commençons par le cas où $\mathcal{J}$ est minorée et donc $\inf_{v\in K} \mathcal{J}(v)$ est un réel donné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de l'infimum, $\inf_{u\in K} \mathcal{J}(u) + \frac{1}{n}$ n'est plus un minorant de $\mathcal{J}$ sur K (puisque $\inf_{u\in K} \mathcal{J}(u) + \frac{1}{n} > \inf_{u\in K} \mathcal{J}(u)$ et que $\inf_{u\in K} \mathcal{J}(u)$ est la borne supérieure des minorants de $\mathcal{J}$ sur K). Donc il existe $u_n \in K$ tel que $\mathcal{J}(u_n) < \inf_{u\in K} \mathcal{J}(u) + \frac{1}{n}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{u\in K} \mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(u_n) < \inf_{u\in K} \mathcal{J}(u) + \frac{1}{n}.$$

On en déduit le résultat par encadrement en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une suite minimisante.

Si $\mathcal{J}$ n'est pas minorée, alors $\inf_{v\in K} \mathcal{J}(v) = -\infty$. Et on sait donc que pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $v \in K$ tel que $\mathcal{J}(v) < m$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. En appliquant ce qui précède à $m = -n$, on en déduit qu'il existe un point $v_n \in K$ tel que $\mathcal{J}(v_n) < -n$. En passant à la limite $n \to +\infty$, on a donc bien le résultat voulu : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite minimisante.

I.3.3 Quelques points ou caractéristiques importants.

L'espace K et type de contraintes.

Si K est égal à V, on parlera de problème d'*optimisation sans contraintes* (ou problème d'*optimisation libre*). Sinon, on parlera de problème d'*optimisation avec contraintes.*

Très souvent l'espace K sera donné par une série d'équations ou d'inéquations et de la forme :

— *Contraintes d'égalités.*
$$K := \{u \in V,\, h_i(u) = 0, i = 1, .., p\}\,,$$
pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné et $h_i : V \to \mathbb{R}$ données, $i = 1, .., p$. On parlera alors d'un cas de problème d'*optimisation avec contraintes d'égalité.* Il y a alors $p \in \mathbb{N}^*$ contraintes données par les fonctions h_i, $i = 1, .., p$.

— *Contraintes d'inégalités.*
$$K := \{u \in V,\, g_i(u) \leq 0, i = 1, .., q\}\,,$$
pour $q \in \mathbb{N}^*$ donné et $g_i : V \to \mathbb{R}$ données, $i = 1, .., q$. On parlera alors d'un cas de problème d'*optimisation avec contraintes d'inégalité.* Il y a alors $q \in \mathbb{N}^*$ contraintes données par les fonctions g_i, $i = 1, .., q$.

— *Contraintes mixtes.*
$$K := \{u \in V,\, h_i(u) = 0, i = 1, .., p,\, g_i(u) \leq 0, i = 1, .., q\}\,,$$
pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ donnés.

Si V est un espace de dimension finie, on parlera de problème d'*optimisation en dimension finie.*

Cas particulier où $V = \mathbb{R}^d$.

On se place dans le cadre qui sera **le cadre majoritaire du cours** ; c'est le cas où $V = \mathbb{R}^d$ pour $d \in \mathbb{N}$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$, i.e. pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^d$, $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^d u_i v_i$, si $u = (u_i)_{i \in \{1,...,d\}}$ et $v = (v_i)_{i \in \{1,...,d\}}$.

Une classe de fonctions $\mathcal{J}$ importante.

Definition I.3.5 *On dit que $\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle quadratique si il existe $A \in M_d(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$.*

Remarque I.3.6 *On peut tout aussi bien écrire $\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$, avec $b \in \mathbb{R}^d$ (on choisit $-b$ à la place de b dans la définition).*

Ici, on fait donc la distinction entre **fonctionnelle** et **forme** quadratique. La différence entre les deux se situe dans le terme linéaire $\langle b, x\rangle$ et le terme constant c que l'on ajoute à la forme quadratique.

Definition I.3.7 *On dit que $\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si il existe $A \in M_d(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.*

Les divers types de problème d'optimisation.

Donnons dans ce cas précis les divers types de problèmes d'optimisation que l'on va distinguer suivant la nature des contraintes.

1. Problèmes sans contraintes
   (a) Problèmes linéaires si $\mathcal{J}$ est **affine** [2],
   (b) Problèmes quadratiques si $\mathcal{J}$ est quadratique,
   (c) Problèmes non linéaires, sinon.
2. Problèmes avec contraintes linéaires (h_i et g_i **affines**)
   (a) Problèmes avec contraintes d'égalité uniquement
      i. Problème linéaire, si $\mathcal{J}$ est **affine**
      ii. Problèmes linéaires-quadratiques, si $\mathcal{J}$ est quadratique
      iii. Problèmes non-linéaires, sinon
   (b) Problèmes avec contraintes d'inégalité et mixtes.
      i. Programmation linéaire si $\mathcal{J}$ est **affine**,
      ii. Problèmes linéaires quadratiques si $\mathcal{J}$ est quadratique,
      iii. Problèmes non linéaires avec contraintes linéaires, sinon.
3. Problèmes de programmation non linéaire.

Cette classification peut varier légèrement suivant les personnes et on peut donner un analogue de classification dans des cas plus généraux que ceux de ce cours.

Dans la première partie de ce cours, on étudiera en détails le cas où $V = \mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ donné. C'est ce que l'on appelle de **l'optimisation en dimension finie** .

2. une fonction affine s'écrit $\mathcal{J}(x) = a + f(x)$ où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, et $a \in \mathbb{R}$.